EXERCICE N°1 : 30' 6 points

1°) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=\sin(x)$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur $[0,1]$.

b) On note g^{-1} la fonction réciproque de f. Déterminer $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

d) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0,1[$ et que pour tout $x\in[0,1[$, $\left(g^{-1}\right)(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

e) En déduire la valeur de $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

2°) Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

a) Calculer I_1.

b) Calculer I_3 à l'aide d'une intégration par partie.

3°) Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ par $f(x)=\frac{2x^3+x-3}{\sqrt{1-x^2}}$.

Déterminer la valeur moyenne de f sur $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

4°) a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

b) Montrer que pour tout $0\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ on a : $1\le\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\le\sqrt{2}$.

c) En déduire que $\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\le I_n\le\frac{\sqrt{2}}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$. Déterminer alors la limite de (I_n).

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

Soit la suite u définie sur IN par : $u_0=\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx$ et $u_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$, $n\in IN^*$.

1°) a) Calculer u_0 et montrer que u est décroissante.

b) Montrer que pour tout $n\in IN$, $0\le u_n\le\frac{1}{n+1}$, puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

2°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $(2n+5)\, u_{n+1} = (2n+2)\, u_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$, $u_n = \dfrac{2^{2n+2}\, n!\, (n+1)!}{(2n+3)!}$.

c) Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2 - 2x + 3\right)\sqrt{1-x}\; dx$.

EXERCICE N°3 : 35' 6 points

Soient les suites I et J définies par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n dt$, $n \in IN^*$.

1°) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $I_{n+1} = I_n - J_n$. Montrer que pour tout $n \in IN$, $J_n = \dfrac{1}{2(n+1)}\, I_{n+1}$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $I_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{2n+3}\, I_n$.

2°) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $I_n = \dfrac{\left(2^n\, n!\right)^2}{(2n+1)!} = 2^n\, \dfrac{n!}{1\times 3\times 5\times \cdots (2n+1)}$.

3°) Soit la suite u définie sur IN par : $u_n = 1 + \dfrac{1!}{1\times 3} + \dfrac{2!}{1\times 3\times 5} + \cdots + \dfrac{n!}{1\times 3\times 5\times \cdots \times (2n+1)}$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $u_n = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\left(\left(1-t^2\right)/2\right)^{n+1}}{1+t^2}\, dt$.

b) On pose $v_n = 2I - u_n$ où $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt$. Exprimer v_n à l'aide d'une intégrale.

c) Vérifier que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \le \dfrac{\left(1-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2} \le 1$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE N°4 : 25' 4 points

Un solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation :

$y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{1-x^4}}$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ autour de l'axe des abscisses.

Le but de cet exercice est de calculer le volume de ce solide.

1) Soit F la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\sin x}} \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}\, dt$.

a) Montrer que F est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer F'.

2) Exprimer $F(x)$ en fonction de x, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Conclure.